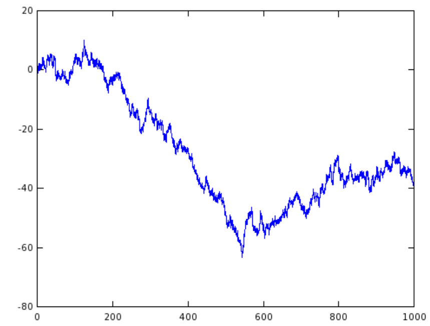
輪読8.6章~8.7章

担当　長谷川禎彦

確率微分方程式

ウィーナー過程



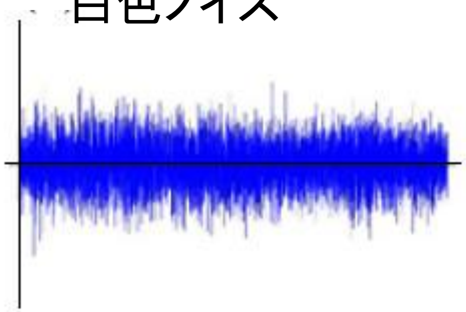
- 微分形式型(数学，金融)
  - W : Wiener過程

$$\boxed{dx = f(x)dt + dW}$$

- 微分方程式型(物理，工学，生物)
  - ξ : 白色ガウスノイズ
  - $< \xi(s)\, \xi(t) > = \delta(s-t)$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t)}$$

白色ノイズ



8.6 WIENER PROCESS

Wiener過程

DEFINITION 8.4 *The stochastic process* $\{W(t) : t \in [0, \infty)\}$ *is a* Wiener process *(standard Brownian motion) if* $W(t)$ *depends continuously on* t, $W(t) \in (-\infty, \infty)$, *and the following three conditions hold:*

(1) For $0 \le t_1 < t_2 < \infty$, $W(t_2) - W(t_1)$ *is normally distributed with mean zero and variance* $t_2 - t_1$*; that is,* $W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$.

(2) For $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \infty$, *the increments* $W(t_1) - W(t_0)$ *and* $W(t_2) - W(t_1)$ *are independent.*

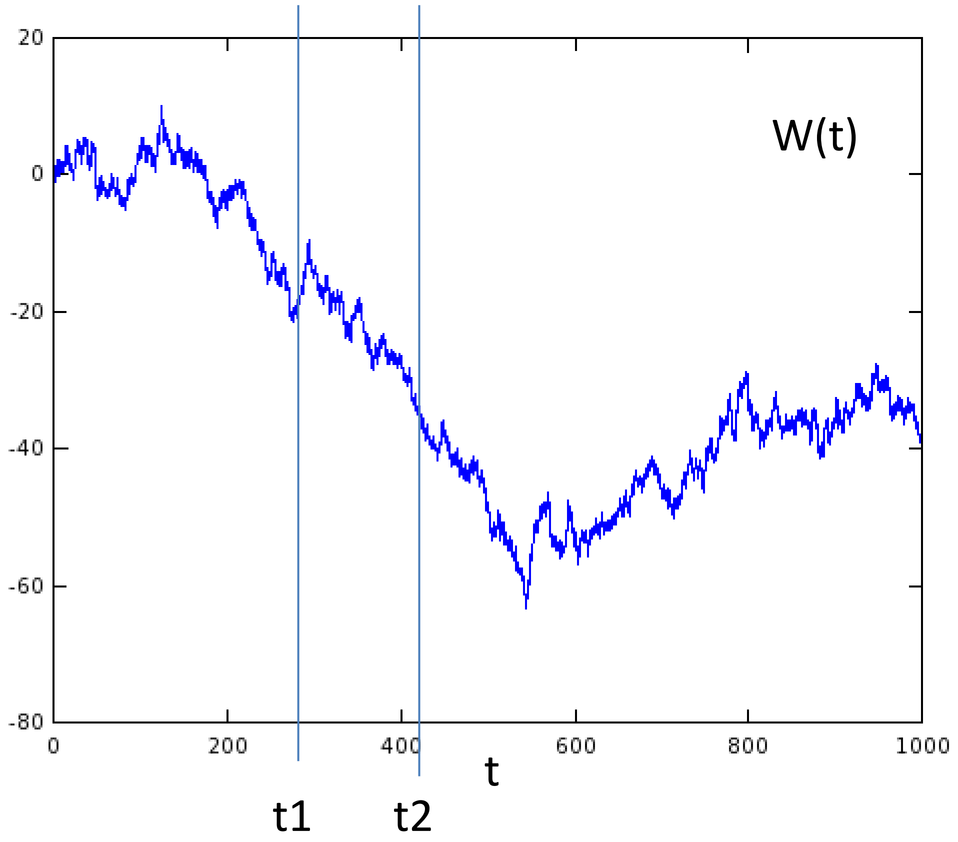
(3) $\mathrm{Prob}\{W(0) = 0\} = 1$.

- 要はドリフトのない，拡散するだけのブラウン運動

$$\frac{dx}{dt} = \xi(t)$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \xi(t')dt'$$

Wiener過程



Wiener過程

$$W(t) = \sum_{i=0}^{t} \Delta W(i) \sim N(0, t),$$

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

$$\Delta W(t_i) = W(t_{i+1}) - W(t_i)$$

- W(t)の標準偏差がsqrt(t)であるので

$$\mathrm{Prob}\left\{ \lim_{t \to \infty} \left| \frac{W(t)}{t} \right| = 0 \right\} = 1.$$

Wiener過程

- 遷移確率は定義より

$$p(y, x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-(y-x)^2}{2t}\right).$$

$$E(\Delta W(t)) = 0, \quad E([\Delta W(t)]^2) = \Delta t, \quad \text{and} \quad E([\Delta W(t)]^4) = 3(\Delta t)^2.$$

- これから，以下を満たす（i）’—(iii)’

(i)’ $\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} |y-x|^\delta p(y, t+\Delta t; x, t) dy = 0 \quad \delta = 4$

(ii)’ $\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (y-x) p(y, t+\Delta t; x, t) dy = 0 = a(x, t)$

(iii)’ $\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^2 p(y, t+\Delta t; x, t) dy = 1 = b(x, t)$

Wiener過程の積分

- W(t)は至るところ微分不可能な関数なので以下のリーマン積分は意味を持たない

$$\int_0^t g(\tau)\frac{dW(\tau)}{d\tau}\,d\tau$$

- 有界変動関数ではないので，リーマンスティルチェス積分も定義出来ない

$$\int_0^t g(\tau)\,dW(\tau)$$

（補足）有界変動関数

- 有界閉区間[0,1]において，あるM＞0が存在して，どのような有限個の分割についても以下が成り立つとき，有界変動関数という

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < M$$

- 例：（広義）単調増加な関数は有界変動関数

（補足）リーマン・スティルチェス積分

- F : 有界変動関数
- 0=x0<x1<…<xn=1

$$\sum_{n=0}^{n-1} f(x_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i))$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{n-1} f(x_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i)) = \int_0^1 f(x)dF$$

- F(x)=xの時，通常のリーマン積分に帰着

（補足）リーマン・スティルチェス積分

- Fの微分が存在して連続ならば，平均値の定理より

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\boxed{\int f(x)dF = \int f(x)F'(x)dx}$$

（補足）リーマン・スティルチェス積分

- 分布関数をF(x)とすると，F(x)は広義単調増加（有界変動関数）なので，確率密度関数p(x)を用いて

$$\int f(x)dF = \int f(x)p(x)dx$$

- 離散的な場合でも，確率関数Pr(x)を用いて

$$\int f(x)dF = \sum_{x \in \Omega} f(x)\,\mathrm{Pr}(x)$$

確率微分方程式の積分

- 至る所，微分不可能関数の積分

$$\int_0^t g(\tau)\frac{dW(\tau)}{d\tau}d\tau = \int_0^t g(\tau)\underbrace{\xi(\tau)}_{\text{白色ノイズ}}d\tau$$

- リーマン積分，ルベーグ積分出来ない
- 新たに積分を定義する
  - Ito積分
  - Stratonovich積分

8.7 ITO STOCHASTIC INTEGRAL

ランダム関数

- *X*(*t*): 確率過程（e.g. ウィーナー過程）
- $f(t) = f(X(t), t)$: 確率変数の関数
  – Ito積分の定義より，どのような形でもOK
- Ito積分では以下を仮定

$$\int_a^b E[f(t)^2]dt < \infty$$

（補足）リーマン･スティルチェス積分

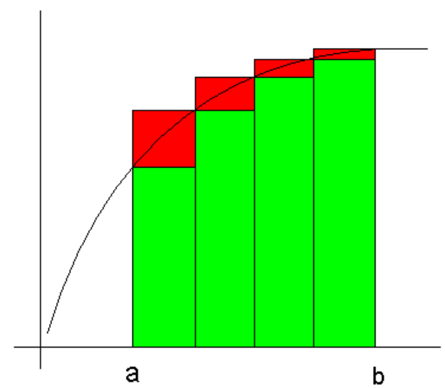
F : 有界変動関数

$$\int_a^b f(x)dF = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} f(x_i)\{F(x_{i+1}) - F(x_i)\}$$

$F(x)=x$ の場合は通常のリーマン積分

$$U = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\left[F(x_{i+1}) - F(x_i)\right]$$

$$L = \sum_{i=1}^{k} \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\left[F(x_{i+1}) - F(x_i)\right]$$



$$\lim_{k\to\infty}[U - L] = 0$$ ⇨ リーマン･スティルチェス積分可能

Definition 8.5

- *f*(*t*) はランダム関数 *f*(*X*(*t*),*t*)
- *W*(*t*) はウィーナー過程

$$a = t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b$$

$$\Delta W(t_i) = W(t_{i+1}) - W(t_i)$$

Ito積分

みかけはリーマン・スティルチェス積分

$$\int_a^b f(t)dW(t) = l.i.m._{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\Delta W(t_i)$$

Stratonovich積分

$$\int_a^b f(t)dW(t) = l.i.m._{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{f(t_i) + f(t_{i+1})}{2}\right] \Delta W(t_i)$$

Definition 8.5

- $l.i.m.$の意味は以下で定義される

$$F_k = \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\Delta W(t_i) \qquad \mathcal{I} = \int_a^b f(t)dW(t)$$

$$\boxed{l.i.m_{k\to\infty} F_k = \mathcal{I} \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} E[(F_k - \mathcal{I})^2] = 0}$$

$F_k \xrightarrow{L_2} \mathcal{I}$ とも記述される

Jensenの不等式より，凹関数 f に対して $E[f(y)] \leq f(E[y])$

これから $|E[F_k - \mathcal{I}]| \leq E[|F_k - \mathcal{I}|] \leq \sqrt{E[(F_k - \mathcal{I})^2]}$

二乗平均収束 ⇒ 一乗平均収束
一般に*m*乗平均収束 ⇒ *n*乗平均収束（*m*>*n*）

（補足）Ito vs Stratonovich

- Itoは**non-anticipated**（現在の値のみに依存）
- Stratonovichは未来の値が必要

- 金融では絶対Ito
  - Non-anticipated
- 物理・工学ではStratonovichが多い（かなり？）
  - 有限の時間相関のノイズの近似と解釈
  - 微分計算が通常のまま使える
  - 逆過程の要請
- Systems BiologyではItoが多い
  - 離散マルコフ過程の連続近似で使う場合が多いため

Theorem 8.1

- 通常のRiemann積分で当然に成り立つ定理がIto積分でも成立
  - *f*(*t*)と*g*(*t*)はrandom function
  - *α*, *a*, *b*, *c*は定数 $a < c < b$

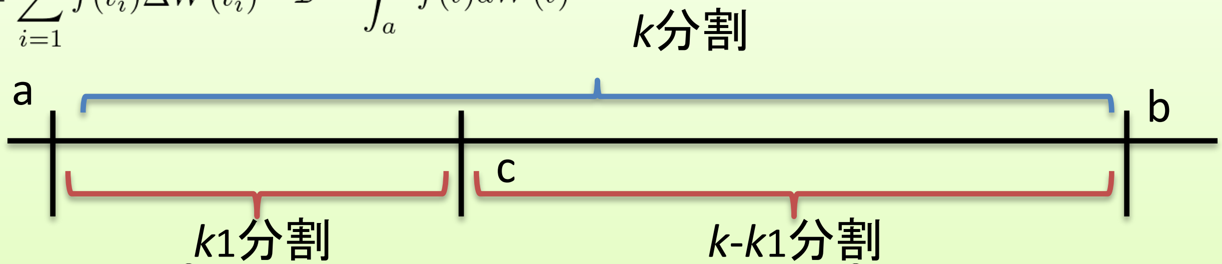
$$(i)\ \int_a^b \alpha f(t)\, dW(t) = \alpha \int_a^b f(t)\, dW(t)$$

$$(ii)\ \int_a^b (f(t) + g(t))\, dW(t) = \int_a^b f(t)\, dW(t) + \int_a^b g(t)\, dW(t)$$

$$(iii)\ \int_a^b f(t)\, dW(t) = \int_a^c f(t)\, dW(t) + \int_c^b f(t)\, dW(t).$$

(iii)

$$F_k = \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\Delta W(t_i) \quad \mathcal{I} = \int_a^b f(t)dW(t)$$



$$F_{k_1} = \sum_{i=1}^{k_1} f(t_i)\Delta W(t_i) \qquad F_{k-k_1} = \sum_{i=k+1}^{k} f(t_i)\Delta W(t_i)$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_a^c f(t)dW(t) \qquad \mathcal{I}_2 = \int_c^b f(t)dW(t)$$

$k_1 > K \wedge k - k_1 > K$ となる十分大きなKに対して以下が成り立つ.

$$E[(F_{k_1} - \mathcal{I}_1)^2] < \frac{\epsilon}{3} \quad E[(F_{k-k_1} - \mathcal{I}_2)^2] < \frac{\epsilon}{3}$$

独立である

$$\begin{aligned}
E[(F_k - \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2)^2] &= E[(F_{k_1} + F_{k-k_1} - \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2)^2] \\
&= E[(F_{k_1} - \mathcal{I}_1)^2] + E[(F_{k-k_1} - \mathcal{I}_2)^2] + 2E[(F_{k_1} - \mathcal{I}_1)(F_{k-k_1} - \mathcal{I}_2)] \\
&= \underbrace{E[(F_{k_1} - \mathcal{I}_1)^2]}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{E[(F_{k-k_1} - \mathcal{I}_2)^2]}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{2E[F_{k_1} - \mathcal{I}_1]E[F_{k-k_1} - \mathcal{I}_2]}_{<\varepsilon/3}
\end{aligned}$$

十分大きいKに対して，二乗平均距離はO(ε)が上限

故に $F_k \xrightarrow{L_2} \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \Longrightarrow \mathcal{I} \xleftarrow{L_2} F_k \xrightarrow{L_2} \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$

(ii) $\mathcal{I} = \int_a^b [f(t)+g(t)]dW(t)$ $\mathcal{I}_f = \int_a^b f(t)dW(t)$ $\mathcal{I}_g = \int_a^b g(t)dW(t)$

$H_k = \sum_{i=1}^{k} [f(t_i)+g(t_i)]\Delta W(t_i)$ $F_k = \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\Delta W(t_i)$ $G_k = \sum_{i=1}^{k} g(t_i)\Delta W(t_i)$

独立でない

$$
\begin{aligned}
E[(H_k - \mathcal{I}_f - \mathcal{I}_g)^2] &= E[\{(F_k - \mathcal{I}_f) + (G_k - \mathcal{I}_g)\}^2] \\
&= E[(F_k - \mathcal{I}_f)^2] + E[(G_k - \mathcal{I}_g)^2] + 2E[(F_k - \mathcal{I}_f)(G_k - \mathcal{I}_g)] \\
&\leq E[(F_k - \mathcal{I}_f)^2] + E[(G_k - \mathcal{I}_g)^2] + 2\sqrt{E[(F_k - \mathcal{I}_f)^2]E[(G_k - \mathcal{I}_g)^2]} \\
&< O(\epsilon)
\end{aligned}
$$

途中，コーシー・シュワルツの不等式を用いている.

$$|E[XY]| \leq E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}$$

故に

$$H_k \xrightarrow{L_2} \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \Rightarrow \mathcal{I} \xleftarrow{L_2} H_k \xrightarrow{L_2} \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

Theorem 8.2
Ito isometry property

$$(i)\ \ E\left[\int_a^b f(t)\,dW(t)\right] = 0 \ \ and$$

$$(ii)\ \ E\left[\left(\int_a^b f(t)\,dW(t)\right)^2\right] = \int_a^b E(f^2(t))\,dt.$$

線形の場合は明らか

$$E\left[\int_a^b c\,dW(t)\right] = cE\left[W(b) - W(a)\right] = 0$$

$$E\left[\left(\int_a^b c\,dW(t)\right)^2\right] = c^2 E\left[(W(b) - W(a))^2\right] = c^2(b-a)$$

(i)の導出

$$(i)\ E\left[\int_a^b f(t)\, dW(t)\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} E[f(t_i)\Delta W(t_i)] = \sum_{i=1}^{k} E[f(t_i)]E[\Delta W(t_i)] = 0$$

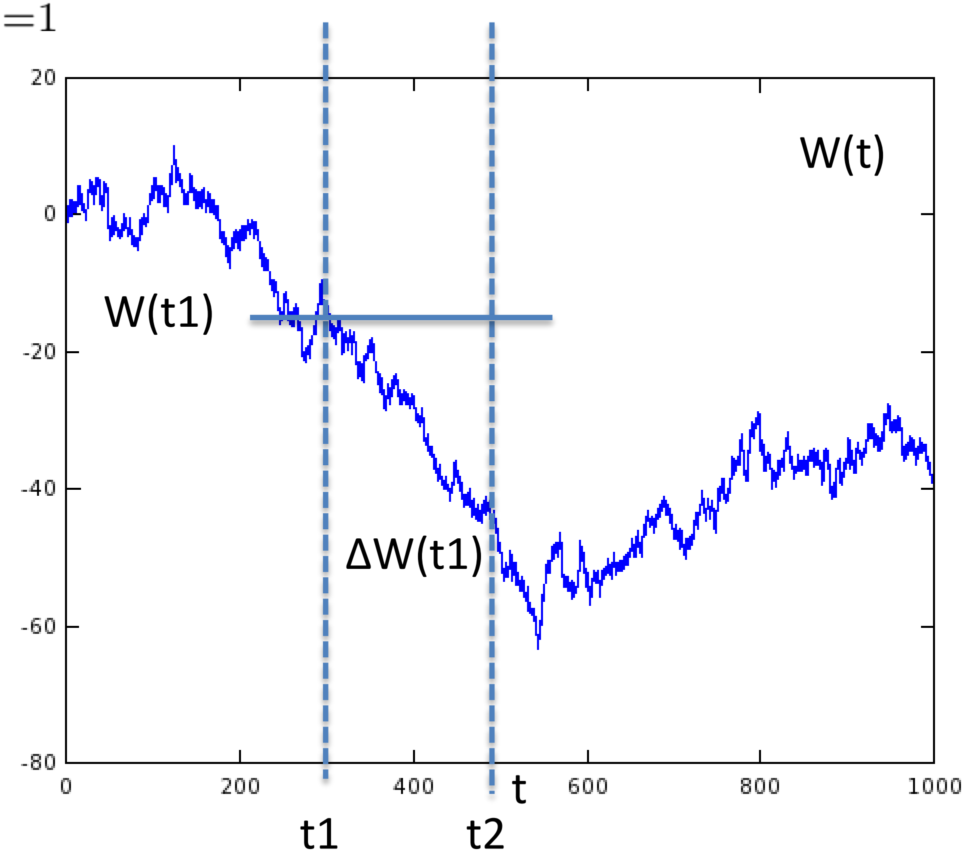
f(*t*)は*W*(*t*)に依存していても良い!
例えば

$$f(t) = W(t)$$

のとき

$$\sum_{i=1}^{k} E[W(t_i)\Delta W(t_i)] = \sum_{i=1}^{k} E[W(t_i)]E[\Delta W(t_i)]$$

f(*t*)=*f*(*X*(*t*),*t*)と書くのは，どのような場合でも成立するから



(ii)の導出

$$(ii)\quad E\left[\left(\int_a^b f(t)\,dW(t)\right)^2\right] = \int_a^b E(f^2(t))\,dt.$$

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\Delta W(t_i)\right)^2\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} f(t_i)f(t_j)\Delta W(t_i)\Delta W(t_j)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{k} f(t_i)^2\left(\Delta W(t_i)\right)^2 + \sum_{i\neq j} f(t_i)f(t_j)\Delta W(t_i)\Delta W(t_j)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} E\left[f(t_i)^2\right] E\left[\left(\Delta W(t_i)\right)^2\right] + \sum_{i\neq j} E[f(t_i)f(t_j)\Delta W(t_i)]E[\Delta W(t_j)] \\
&= \sum_{i=1}^{k} (t_{i+1} - t_i) E\left[f(t_i)^2\right] \\
&\to \int E\left[f(t)^2\right] dt
\end{aligned}$$

Example 8.4

Example 8.4. The following Itô stochastic integral will be shown to be equal to

$$\int_0^t W(\tau)\,dW(\tau) = \frac{1}{2}\left[W^2(t) - t\right]. \tag{8.21}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(W_i^2) &= W_{i+1}^2 - W_i^2 \\
&= (W_{i+1} - W_i)^2 + 2W_i(W_{i+1} - W_i) \\
&= (\Delta W_i)^2 + 2W_i \Delta W_i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} W_i \Delta W_i &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \Big[\Delta(W_i^2) - (\Delta W_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}W_{k+1}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\Delta W_i)^2 \qquad \text{....(a)} \\
&= \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\Delta W_i)^2
\end{aligned}$$

Example 8.4

定義から $\displaystyle\int_0^t W(\tau)\,dW(\tau) = l.i.m._{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} W_i\,\Delta W_i,$ なので(a)より

$$\int_0^t W(s)dW(s) = l.i.m. \left[\frac{1}{2}\left\{W(t)^2 - \sum_{i=1}^{k}(\Delta W_i)^2\right\}\right]$$

示したい式と比較すると，以下が成立すれば良い

$$E\left[\left(t - \sum_{i=1}^{k}(\Delta W_i)^2\right)^2\right] \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

$$\Downarrow$$

$$t^2 - 2t(t) + E\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\Delta W_i)^2(\Delta W_j)^2\right].$$

Example 8.4

$$
\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\Delta W_i)^2(\Delta W_j)^2\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{k}(\Delta W_i)^2\right] E\left[\sum_{j=1,j\neq i}^{k}(\Delta W_j)^2\right] \\
&\quad + E\left[\sum_{i=1}^{k}(\Delta W_i)^4\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k}\Delta t\sum_{j=1}^{k-1}\Delta t + k3(\Delta t)^2 \\
&= t(k-1)\frac{t}{k} + 3k\left(\frac{t}{k}\right)^2, \\
&\to t^2 \text{ for } k \to \infty
\end{aligned}
$$

Example 8.6

Example 8.6. From the Itô isometry property in Theorem 8.2, it follows that

$$E\left[\left(\int_a^b W(t)\,dW(t)\right)^2\right] = \int_a^b E(W^2(t))\,dt = \int_a^b t\,dt = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

- 上の関係式はIto isometry propertyより自明
- 例8.5の式を用いても計算できる

例8.5の式

$$\int_a^b W(t)\,dW(t) = \frac{1}{2}\left[W^2(b) - W^2(a)\right] - \frac{1}{2}[b-a].$$

Example 8.6

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\int_a^b W(t)\,dW(t)\right)^2\right] &= \frac{1}{4}E\left[\left(W^2(b) - W^2(a) - (b-a)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left\{E\left[W^4(b) - 2W^2(b)W^2(a) + W^4(a)\right]\right. \\
&\quad \left. - E\left[2(W^2(b) - W^2(a))(b-a) - (b-a)^2\right]\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left[3b^2 - 2E(W^2(b)W^2(a)) + 3a^2\right. \\
&\quad \left. -2(b-a)^2 + (b-a)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[2b^2 + 2a^2 + 2ab - 2E(W^2(b)W^2(a))\right],
\end{aligned}
$$

$$E[W(a)^2W(b)^2] \neq E[W(a)^2]E[W(b)^2]$$

Example 8.6

独立

$$W(a)^2 W(b)^2 = \left[W(b)^2 - W(a)^2\right] W(a)^2 + W(a)^4$$

独立ではない

$$W(b)^2 - W(a)^2 = 2\int_a^b W(t)dW(t) + (b-a)$$

例8.5の式．区間(b-a)のみに依存

$$E[W(b)^2 W(a)^2] = (b-a)a + 3a^2$$